جامعة محمد الخامس بالرباط
Université Mohammed V de Rabat

Année Universitaire 2015/2016
Licence fondamentale (Semestre 3)

Travaux dirigés en matière de : «Echantillonnage et Estimation»

Groupes : «A » et « C »

Professeur : Monsieur El GHINI AHMED

Assuré par : YAKHLEF Abdelali

La Moyenne d'un échantillon

Exercice 1 (Extrait de l'examen Final 2012-2013)

(Calcul des Probabilités)

Supposons que les notes d'une promotion de 50 étudiants en économétrie ont une moyenne de 11 avec un écart-type de 3 .

1) Trouver la probabilité qu'un échantillon aléatoire ait une note de moins de 14 .

2) Calculer la probabilité que la moyenne soit supérieur à 10 .

YAKHLEF Abdelali

La Moyenne d'un échantillon

Exercice 2

(Intervalle de confiance)

Supposons que l'on prenne un échantillon aléatoire de 100 comptes-clients , d'une chaine de magasins et que l'on trouve que le solde moyen débiteur est de 74$.

1) Si l'on sait que l'écart-type pour tous les comptes est de 0.86$, trouver l'intervalle de confiance à 95 % pour la moyenne de la population , Commenter le résultat .
2) Calculer la langueur de L'intervalle I.
3) Déterminer la marge d'erreur de l'intervalle de confiance I .

YAKHLEF Abdelali

La Moyenne d’un échantillon

Exercice 3 (Extrait de l’examen Final 2012-2013)

(Test d’hypothèse)

Suite à une circulaire interdisant de fumer dans les endroits publics , une grande entreprise cherche à savoir si ce dispositif à contribuer à la réduction du tabagisme de ses salariés fumeurs avant l’application de cette circulaire , elle sait que chaque salarié fumeur consomme en moyenne 10 cigarettes par jour après l’application de la circulaire , on a demandé à un échantillon aléatoire de 100 salariés de noter le nombre moyen de cigarette fumées par jour , on trouve une moyenne $\bar{x}$ =7 , avec un écart-type s=16.

1)Formuler les Hypothèses testées H0 et H1 pour évaluer l’impact de ce dispositif sur le tabagisme .

2)On considère un risque de premier espèce de 2% , réaliser le test , quelle est votre conclusion ?

3) Même question avec un risque de 15 % .

4)Déterminer le degré de signification du test , comment peut on l’interpréter .

5) Construire un intervalle de confiance à 98% autour de la moyenne de l’échantillon .

6)Y a-t-il un lien entre l’intervalle de confiance et le test d’hypothèse ?

7)Sachant que la fréquence observée de fumeurs dans l’échantillon précédent est de 60%

(a) Construire un intervalle de confiance au niveau 90 % pour le pourcentage de fumeurs au sein de l’entreprise .

(b) Quelle est la marge d’erreur de cet intervalle de confiance ?

YAKHLEF Abdelali

La Fréquence d’un échantillon

Exercice 1

(Calcul des Probabilités)

Trouver la probabilité que parmi les 200 prochains enfants à naitre dans un Hôpital :

1)Il y a moins de 40 % de garçons .

2) Il y a plus de 54% de garçons .

3) Il y a entre 43 % et 55% de filles .

YAKHLEF Abdelali

La Fréquence d'un échantillon

Exercice 2 (Extrait de l'examen Final 2013-2014)

(Intervalle de confiance)

Dans le cadre d'une étude sur « l'adéquation entre Formation - Emploi » , on a interrogé 500 Chefs d'entreprises de différents secteurs , 145 entre eux déclarent être satisfaits de l'adéquation entre les formations universitaire et le marché du travail .

1) Identifier la Population
2) Donner une estimation ponctuelle de la proportion de chefs d'entreprises qui sont satisfaits de l'adéquation entre la formation universitaire et l'emploi, puis une estimation de cette proportion par un intervalle de confiance à 90 % .
3) Déterminer la marge d'erreur de l'intervalle de confiance précédent .
4) **Combien de chefs d'entreprise qui vont déclarer qu'ils sont satisfaits de l'adéquation entre les formations et l'emploi , avec une précision de 1 % au niveau de confiance de 90 % .**

YAKHLEF Abdelali

La Fréquence d’un échantillon

Exercice 3

(Test D’hypothèse)

Une Minorité forme 20 % de la population d’un pays , on se demande si cette minorité est représenté fidèlement (C’est-à-dire ni sous représentée , ni surreprésentée) dans une grande administration . On prélève un échantillon aléatoire simple de 200 employés de cette administration , et on constate qu’il comprend 30 personne appartenant à la minorité .

1)Définissez les hypothèses H0 et H1.

2) Pour quelles valeurs de la proportion observée dans l’échantillon ne refuserait-on pas l’hypothèse H0 au profit de l’hypothèse alternative H1 , (avec un risque α de 10 %)

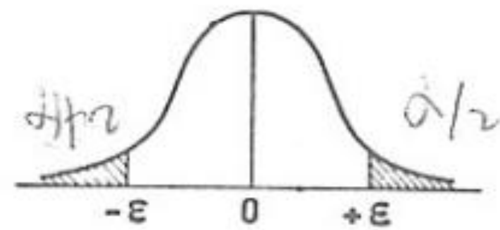
3)Déterminer le degré de signification du test .

YAKHLEF Abdelali

Table de la loi Normale N(0,1)

Table de l'écart-réduit (loi normale) (*)

La table donne la probabilité α pour que l'écart-réduit égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée ε, c'est-à-dire la probabilité extérieure à l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$.



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

La probabilité α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Exemple : Pour $\varepsilon = 1{,}960$ la probabilité est $\alpha = 0{,}00 + 0{,}05 = 0{,}05$.

YAKHLEF
Abdelali

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

YAKHLEF Abdelali

EXERCICE 1, Calcul des probabilités { Moyenne

1

1/ La probabilité qu'un échantillon aléatoire simple de 50 étudiant ait une note moyenne de 14.

$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ c-à-dire : $\overline{X} \sim N\left(E(\overline{X}) = 11 ; V(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

alors : $\frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ centrée réduite.

$$P(\overline{X} < 14) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{14 - 11}{\frac{3}{\sqrt{50}}}\right)$$

Ali YAKHLEF

$$= P(Z < 7{,}07)$$

$$= \phi\, 7{,}07 = 1 = 100\,\%.$$

Puisque 7,07 n'est pas lu dans la Table donc $\phi 7{,}07 = 1$

2/ La probabilité que la moyenne soit supérieure à 10.

$$P(\overline{X} > 10) = P\left(\frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{10 - 11}{\frac{3}{\sqrt{50}}}\right)$$

$$= P(Z > -2{,}36)$$

$$= P(Z < 2{,}36) = \phi\, 2{,}36$$

$$= 0{,}9909 = 99{,}09\,\%$$

Moyenne.

EXERCICE 2, INTERVALLE de confiance

2

1/ on a $n = 100 \geq 30$, $\sigma = S = 0,86\,\$$, $1-\alpha = 95\%$

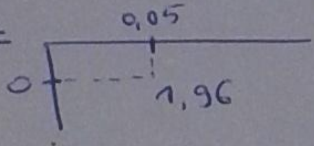
et $\bar{x} = 74\,\$$ alors $\alpha = 5\%$.

l'intervalle de confiance pour la moyenne de la population est :

$$I = \left[\bar{X} - \varepsilon_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{X} + \varepsilon_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$n \geq 30$

avec ε_α d'après la Table de la loi normale :

$\varepsilon_\alpha =$  $= 1,96$

Ali YAKHLEF

donc

$$I = \left[74 - 1,96 \cdot \frac{0,86}{\sqrt{100}} \; ; \; 74 + 1,96 \cdot \frac{0,86}{\sqrt{100}} \right]$$

$$= [73,8374 \; ; \; 74,1686]$$

commentaire standard :

En se basant sur notre échantillon de 100 compte (Taille n), on déduit que la moyenne de la population se trouve dans l'intervalle I avec un niveau de confiance de $(1-\alpha) = 95\%$

2/ a. la marge d'erreur : (Precision) $[a, b]$

$$\beta = \frac{b-a}{2} = \varepsilon_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{74,1686 - 73,8374}{2}$$

$$= 0,1685$$

b. la longueur :

$$L(\alpha, n) = b - a = 2\varepsilon_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,3371$$

Exercice 3 Tests d'hypothèses

Moyenne

3

1/ La Formulation des hypothèses :

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 10 \\ H_1 : \mu < 10 \end{cases}$$

$H_0 : \mu = 10$: le dispositif n'a pas contribuer à la réduction du Tabagisme.

$H_1 : \mu < 10$: le dispositif a contribué à la réduction des salariers fumeurs au sein de l'E/se.

(la moyenne des cigarettes consommés = 10)

2/ La réalisation du Test :

$n \geq 30$ loi normale

RH₀ si et seulemet si :

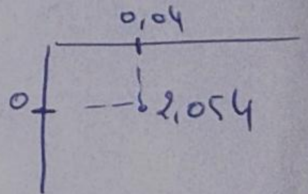
$$\overline{X}_n < \mu_0 - \xi_{2\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$\xi_{2\alpha} = \xi_{2 \cdot 0,02} = \xi_{0,04}$

avec $w^* = \mu_0 - \xi_{2\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}$

$$= 10 - 2,054 \frac{16}{\sqrt{100}}$$

$$= 6,7136$$



Ali YAKHLEF

et on a $\overline{x} = 7$.

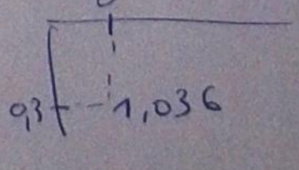
on a $\overline{x} > w^*$ alors on va accepter H_0.

conclusion

cela signifie que le dispositif n'a pas contribué à la du Tabagisme avec un risque de 1è espèce de 2%.

3/ même question avec un risque de 15%.

$\alpha = 15\% \Rightarrow 2\alpha = 30\%$ $\xi_{0,3} = 1,036$



$$w^* = 10 - 1,036 \cdot \frac{16}{10} = 8,3424$$

$\overline{x} = 7$

on a $7 < 8,3424$

donc on rejet H_0

cela signifie que le dispositif contribuera à la réduction du Tabagisme avec un risque d'erreur de 15%

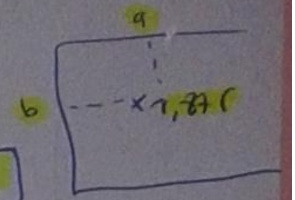
4/ le degré de signification : α^*

on a $\quad \bar{X} = \mu_0 - \xi_{2\alpha^*} \dfrac{S}{\sqrt{n}}$

$$-\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right) = \xi_{2\alpha^*} \quad \text{donc} \quad \xi_{2\alpha} = 1,881$$

$2\alpha^* = a + b$

$= 6\%$



alors $\boxed{\alpha^* = 3\%}$

donc le degré de signification $= 3\%$

interpretation :

non rejet de Ho — rejet de Ho

0 — $\alpha^* = 3\%$ — 100%

* donc de 0 à 3 il y a Tjr le non rejet de Ho. mais apres α^* c'est la zone de rejet de Ho.

$\Rightarrow$ α^* est le lien entre le RHo et le non rejet de Ho, c'est la valeur entière.

5/ l'intervalle de confiance :

On $n = 100 > 30$

$$I = \left[\bar{X} - \xi_\alpha \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{X} + \xi_\alpha \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$\xi_\alpha = \xi_{2\%}$
$= \xi_{0,02}$
$= 2,326$

$$= \left[7 - 2.326 \cdot \frac{16}{\sqrt{100}} \; ; \; \bar{X} + 2.326 \cdot \frac{16}{\sqrt{100}}\right]$$

$$= [3,2784 \; ; \; 10,7216]$$

commentaire standard. voir le cours.

6/ on déduit donc que la moyenne des sigarettes fumé se trouve dans l'intervalle avec un risque d'erreur de 2%, or $\bar{x} = 7 \in$ à cette intervalle donc on accord avec notre règle de décision qu'on a le non rejet de Ho.

7/ a- frequence observe : Pour $f = 0,6$.

conditions, on a :

$$\begin{cases} n = 100 \geq 30 \\ n \cdot f = 100 \cdot 0,6 > 5 \\ n(1-f) > 5 \end{cases}$$

$$I = \left[f - \xi_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; ; \; f + \xi_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

$\boxed{\alpha = 10\%}$

$$= [0,5194 \; ; \; 0,6805]$$

Ali YAKHLEF

5

b- la marge d'erreur.

$$\beta = \frac{b-a}{2} = \xi_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

Proportion (échantillon).

6

*Exercice 1 (calcul des probabilité)

$$F_n \sim N\left(E(F)=P=0{,}5\ ,\ V(X)=\sqrt{\frac{P.q}{200}} = \sqrt{\frac{0{,}5(0{,}5)}{200}}\right)$$

a- $P(F_{(g)} < 0{,}4) = P\left(\dfrac{F_g - P}{\sqrt{\frac{P.q}{n}}} < \dfrac{0{,}4-0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}25}{200}}}\right)$

$= P(Z < -2{,}85) \Rightarrow P(Z > 2{,}85) = 1 - P(Z < 2{,}85)$

$\Rightarrow = 1 - \phi 2{,}85$

$= 1 - 0{,}9978$

$= 0{,}0022.$

Ali YAKHLEF

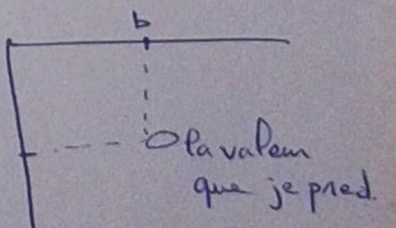
b- $P(0{,}43 < F_g < 0{,}55) = P\left(\dfrac{0{,}43-0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}25}{200}}} < \dfrac{F(g) - P}{\sqrt{\frac{P.q}{n}}} < \dfrac{0{,}55-0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}25}{200}}}\right)$

$= P(-1{,}9798 < Z < 1{,}4142)$

$= P(Z < 1{,}4142) - P(Z < -1{,}9798)$

$= P(Z < 1{,}4142) - [1 - P(Z < 1{,}9798)].$

$= 0{,}9207 - (1 - 0{,}9756) = 0{,}8963$



c- $P(F_g > 0{,}54) = P\left(\dfrac{F_g - P}{\sqrt{\frac{P.q}{n}}} > \dfrac{0{,}54-0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}25}{200}}}\right)$

$\Rightarrow P(Z > 1{,}14) \Rightarrow 1 - P(Z < 1{,}14)$

$= 1 - \phi 1{,}14$

$= 1 - 0{,}8729$

$= 0{,}1271.$

Exercice 2 (intervalle de confiance) — Proportion

1/ * la population : les chefs d'entreprises

* la variable :

* le Paramètre d'intérêt à estimer :

* Estimation ponctuelle :

2/ $E(F_n) = P = \frac{145}{500} = 0,29 = 29\%$

* estimation par intervalle de confiance :

on a $n = 500 \geqslant 30$, $n \cdot f = 500 \cdot 0,29 = 145 > 5$

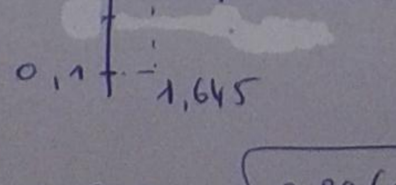
$n \cdot (1 - f) = 500(1 - 0,29) = 355 > 5$

donc l'intervalle de confiance de cette proportion est :

$$I = \left[\underbrace{f}_{\text{proportion de l'échantillon}} - \varepsilon_\alpha \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; , \; f + \varepsilon_\alpha \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}}_{\sigma} \right]$$

avec

$\varepsilon_\alpha \Rightarrow$ niveau de confiance : $1 - \alpha = 90\% \Rightarrow \alpha = 10\%$



$\varepsilon_\alpha = 1,645$

$$I = \left[0,29 - 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,29(1-0,29)}{500}} \; ; \; 0,29 + 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,29(1-0,29)}{500}} \right]$$

$$= [0,2566 \; ; \; 0,3233]$$

en se basant sur notre échantillon, on déduit que la proportion de chefs d'e/se qui sont satisfaits de l'adéquation entre les formations universitaires et l'emploi se trouve dans I avec un niveau de confiance de $1 - \alpha$.

Ali YAKHLEF

7

Exercice 3 – Tests d'hypothèses. Proportion

1/ La définition des hypothèses:

$$\begin{cases} H_0 : P = P_0 = 0,2 : \text{La minorité est fidèlement représenté.} \\ H_1 : P \neq P_0 \neq 0,2 : \text{La minorité n'est pas fidèlement représenté.} \end{cases}$$

2/ La règle de décision (risque de 10%)

rejeter H_0 au profit de H_1 si et seulement si :

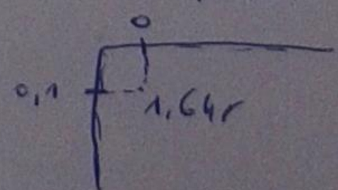
$$|F_n - P_0| > \xi_\alpha \sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$$

avec $F_n = \frac{30}{200} = 0,15$

$|F_n - P_0| = |0,15 - 0,2| = 0,05$

et $\rho^* = \xi_\alpha \sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} = 1,645 \sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{200}}$ avec $\xi_\alpha = \xi_{0,1} = 1,645$

$= 0,046$



on a $F_n > \rho^*$ alors on rejet H_0, c-à-dire la minorité n'est pas fidèlement représenté.

E. Proportion

9

Ali YAKHLEF

3/ le degré de signification α^* :

on a $$|F_n - P_0| = \xi_{\alpha^*} \sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$$

$$\xi_{\alpha^*} = \frac{|F_n - P_0|}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = \frac{0,05}{0,028} = 1,7677$$

	0,08
0,0	1,751

donc $\alpha^* = 0,08 = 8\%$

3/ la marge d'erreur : (rayon). (Precision) (cetre)   { Proportion

$$me = \frac{b-a}{2} = \varepsilon_\alpha \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 0{,}0333.$$

Sur plus

On a $m = \varepsilon_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$?

$$\left(\frac{m}{\varepsilon_\alpha}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right)^2 \Rightarrow \frac{m^2}{\varepsilon_\alpha^2} = \frac{f(1-f)}{n} \Rightarrow \frac{\varepsilon_\alpha^2}{m^2} = \frac{n}{f(1-f)}$$

$$\Rightarrow \boxed{n = \frac{\varepsilon_\alpha^2 \cdot f(1-f)}{m^2}}$$

m en β.

$$= \frac{(1{,}645)^2}{(0{,}01)^2} \cdot 0{,}29(1-0{,}29)$$

$$= 5571.$$

EXERCICE - Questions de cours -

Soit $X_1, X_2, \dots, X_2$ un échantillon aléatoire simple relatif à la variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres m et $\sigma^2 > 0$.

(a) Donner un estimateur sans biais et efficace de m et un estimateur sans biais et asymptotiquement efficace de σ^2.

(b) Déterminer la loi de la statistique $T_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - m}{\sigma}\right)^2$.

a) l'estimateur sans biais et efficace de m :

1/ $E(\bar{X}) = m$, $m \longrightarrow \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

✓ $\bar{X}$ est un estimateur sans biais et efficace de m.

Ali Yakhlef

2/ sans biais et asymptotiquement efficace de σ^2.

$$E(\sigma^2) = \underbrace{S_n^2}_{\text{variance corrigée}} \Rightarrow, \quad \sigma^2 \longrightarrow S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

✓ S_n^2 est un estimateur sans biais et efficace de σ^2.

b) la loi de la statistique , $T_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - m}{\sigma}\right)^2$

On sait que : $Z_i = \left(\frac{X_i - m}{\sigma}\right)$

Z_i constitue une suite de variable aléatoire identiquement indépendantes distribués (iid)

alors $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2$

alors T_n suit la loi de Khi-deux.