# COURS D'ECHANTILLONNAGE ET ESTIMATIONS
# Chapitre : Estimation

Licence fondamentale en Sciences Economiques et Gestion
Année universitaire 2016-2017

# Plan

## Estimation

- **1 :** *L'estimation ponctuelle*
- **2 :** *L'estimation par intervalle*

# Estimation :Généralités sur l'estimation

## Principe de l'estimation.

L'objectif de l'estimation est de donner une valeur approché à un paramètre (moyenne, variance, fréquence,...) d'une population à partir d'un échantillon, et ce avec une précision la plus élevée possible.

## Définition de l'estimation.

L'estimation est l'évaluation d'un paramètre inconnu $\theta$ de la population par une ou plusieurs valeurs possibles.

## Remarque :

- L'éstimation du paramétre $\theta$ est une varaible aléatoire $\hat{\theta}$ dont la distribution de probabilité s'appelle la distribution d'échantillonnage du paramétre $\theta$
- L'estimation $\hat{\theta}$ admet donc une esperance mathématique $E(\hat{\theta})$ et une variance $V(\hat{\theta})$.

# Estimation :Généralités sur l'estimation

## Types d'estimation

- Quand on estime $\theta$ par une valeur unique, on parle d'estimation ponctuelle.
- Quand on estime $\theta$ par tout un intervalle de valeurs, on parle d'estimation par intervalle de confiance.

## Définition de l'estimateur

Un estimateur d'un paramètre $\theta$ d'une population est une fonction des valeurs $X_1, X_2, ..., X_n$ observées susceptibles de servie à estimer $\theta$ .On écrit :

$$T_n = f(X_1, X_2, ..., X_n)$$

On appelle estimation par intervalle de confiance au risque $\alpha$ tout intervalle $[\hat{\theta}_1; \hat{\theta}_2]$ tel que la probabilité que cette intervalle contienne la valeur du paramètre $\theta$ soit égale à $1-\alpha$. C-à-d :

$$P(\theta \in ]\hat{\theta}_1; \hat{\theta}_2[) = 1-\alpha$$

# Estimation : Généralités sur l’estimation

## Qualité d’un estimateur

Estimateur sans biais : Soit $T_n$ un estimateur de $\theta$ . On dit que $T_n$ est un estimateur sans biais de $\theta$, si on a :

$$E(T_n) = \theta$$

## Exemple :

- $X$ est un estimateur sans biais de m ; en effet $E(\overline{X}) = m$.
- $f$ est un estimateur sans biais de p ; en effet $E(f) = p$.
- La varaince empirique calculée sur un échantillon de taille n donnée par : $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ est un estimateur avec biais de la variance de la population $\sigma^2 = \frac{\sum_{s=1}^{N}(x_s - m)^2}{N}$, puisque $E(S^2) = (\frac{n-1}{n}) \times \sigma^2$ .
  où $(\frac{n-1}{n})$ le Biais.

## Qualité d'un estimateur

Estimateur efficace : $T_n$ est un estimateur efficace de $\theta$ si c'est un estimateur sans biais de $\theta$ et qui a une variance minimale parmi tous les estimateurs sans biais de $\theta$.

En effet : Soient $\theta_1$ et $\theta_2$ deux estimateurs sans biais et convergents d'un meme paramétre $\theta$, le plus efficace est celui qui a la variance la plus faible car ses valeures sont en moyennes plus proches de la quantité estimée :

$$V(\theta) = E[\theta - E(\theta)]^2 \ \ minimale$$

Ainsi, si nous constatons par exemple que : $V(\theta_1) \prec V(\theta_2)$, nous dirons alors que l'estimateur $\theta_1$ est meilleur ou plus efficace que l'estimateur $\theta_2$ car sa variance est plus fible. Cela traduit le fait que à prioi on a plus de chance d'obtenir, sur un échantillon aléatoire, une estimation proche de $\theta$ en considérant l'estimateur $\theta_1$.

## Exemple :

Pour l'estimateur sans biais de $\overline{X}$ du paramétre m, on constate que :

- $V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ dans le cas d'un tirage avec remise (T.A.R) ;
- $V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$ dans le cas d'un tirage sans remise (T.S.R) ;
  Nous dirons alors que l'estimateur $\overline{X}$ dans le cas d'un tirage sans remise est meilleur ou plus efficace que l'estimateur $\overline{X}$ dans le cas d'un tirage avec remise car sa variance est plus faible. En effit :

$$(V(\overline{X})_{T.S.R}) \prec (V(\overline{X})_{T.A.R}) \Rightarrow (\frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1})_{T.S.R} \prec (\frac{\sigma^2}{n})_{T.A.R}$$

## Qualité d'un estimateur

- Estimateur de faible disperstion :
- Estimateur convergent :

# Estimation :Généralités sur l'estimation

## Objectifs

Dans ce qui suit, nous allons étudier trois cas particuliers. Il s'agit de l'estimation de :

- d'une proportion $p$,
- d'une moyenne $m = \mu$,
- d'une variance $\sigma^2$.

# Estimation de la moyenne d'une population

## Estimation ponctuelle

- Etant donné une population de moyenne m, l'estimateur sans biais de m est donné par :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- La variance de cet estimateur est :

$$V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

où $\sigma^2$ est la variance de la population

# Estimation de la moyenne d'une population

Remarque : On suppose que le tirage est non exhaustive dans tous les cas.

## Estimation par intervalle de confiance : Cas d'une population normale

Etant donné une population normale de moyenne $m$ et de variance $\sigma^2$, c'est-à-dire la variable aléatoire concernée $X$ de la population suit la loi normale $N(m, \sigma)$.

## Estimation par intervalle de confiance : Cas d'une population normale

- L'estimateur par intervalle de confiance de m consiste à déterminer les bornes $x_1$ et $x_2$ de l'intervalle $I$, pour lesquelles $I$ a un niveau de confiance, appelé probabilité $1-\alpha$, de contenir $m$. $\alpha$ est appelé risque d'erreur.

- Les bornes $x_1$ et $x_2$ sont telles que :

$$P(x_1 \leq m \leq x_2) = 1 - \alpha$$

## Estimation par intervalle de confiance : Cas d'une population normale

Cas d'écart type connu :

$$P(x_1 \leq m \leq x_2) = P(\overline{X} - x_2 \leq \overline{X} - m \leq \overline{X} - x_1) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{\overline{X} - x_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\overline{X} - x_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(\frac{\overline{X} - x_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq T \leq \frac{\overline{X} - x_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \alpha$$

ou :

$$T = \frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Donc :

$$T = \frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \hookrightarrow N(0, 1)$$

# Estimation de la moyenne d'une population

## Estimation par intervalle de confiance : Cas d'une population normale

- Soit $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ la valeur de la variable normale $N(0,1)$ , appelé quartile, lue dans la table, c'est-à-dire :

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

- $On \;\; a$ : $\begin{cases} P(\frac{\overline{X}-x_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq T \leq \frac{\overline{X}-x_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = 1-\alpha, \\ \\ P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha, \end{cases}$

# Estimation de la moyenne d'une population

## Estimation par intervalle de confiance : Cas d'une population normale

*Alors* : $\begin{cases} \frac{\overline{X}-x_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \\ \\ \frac{\overline{X}-x_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \end{cases}$

Donc : $x_1 = \overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ et $x_2 = \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

D'ou :

$$I_c(m) = [\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

# Estimation de la moyenne d'une population

## Estimation par intervalle de confiance : Cas d'une population normale

Cas d'écart type inconnu :
Taille d'échantillon de $n < 30$ :

- Dans le cas où la variance est inconnue, on utilise la quasi-variance comme estimation de la variance.
- L'intervalle de confiance de la moyenne $I_c(m)$ est définie comme suit :

$$P(x_1 \leq m \leq x_2) = P(\overline{X} - x_2 \leq \overline{X} - m \leq \overline{X} - x_1) = 1 - \alpha$$

## Estimation par intervalle de confiance : Cas d'une population normale

$$P\left(\frac{\overline{X}-x_2}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\overline{X}-m}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\overline{X}-x_1}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}}\right) = 1-\alpha$$

ou :

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{n}{n-1}V(X)}$$

Comme $X \hookrightarrow N(m,\sigma)$ et $\sigma$ est inconnue alors :

$$T = \frac{\overline{X}-m}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}} \hookrightarrow T_{n-1}$$

## Estimation par intervalle de confiance : Cas d'une population normale

- Soit $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ la valeur de la variable Student à n-1 degré de liberté lue à partir de la table de , c'est-à-dire :

$$P(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

- $On \ \ a :$ $\begin{cases} P(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha, \\ \\ P(\frac{\overline{X}-x_2}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}} \leq T \leq \frac{\overline{X}-x_1}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}}) = 1-\alpha, \end{cases}$

# Estimation de la moyenne d'une population

## Estimation par intervalle de confiance

*Alors* : $\begin{cases} \dfrac{\overline{X}-x_2}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}} = -t_{1-\frac{\alpha}{2}}, \\ \\ \dfrac{\overline{X}-x_1}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}, \end{cases}$

Donc : $x_1 = \overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$ et $x_1 = \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$

D'ou :

$$I_c(m) = Ic = [\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}]$$

# Estimation de la moyenne d'une population

## Estimation par intervalle de confiance

Cas d'une population de loi quelconque et $n \geq 30$ :

- L'intervalle de confiance de la moyenne $I_c(m)$ est définie comme suit :

$$P(x_1 \leq m \leq x_2) = P(\overline{X} - x_2 \leq \overline{X} - m \leq \overline{X} - x_1) = 1 - \alpha$$

$$P(\frac{\overline{X} - x_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\overline{X} - x_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(\frac{\overline{X} - x_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq T \leq \frac{\overline{X} - x_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = 1 - \alpha$$

ou :

$$T = \frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \hookrightarrow N(0, 1)$$

Donc :

$$I_c(m) = [\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ ; \ \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Remarque :Si $\sigma$ est inconnue alors on remplace $\sigma$ par $\hat{S}$.

## Exemple 1 : Estimation d'une moyenne, dans le cas où la variance $\sigma^2$ est connue

Une machine produit en grande série des objets de masse théorique 180g. On admet que la variable aléatoire qui associe à un objet sa masse a pour ecart-type 0,92g. On préléve un échantillon de 100 objets et on mesure la masse de chacun, on obtient une moyenne de 179,93g.

Déterminer un intervalle de confiance au seuil de risque de 1%, de la masse $\mu$ d'un objet.

# Estimation

## Exemple 1 : Estimation d'une moyenne, dans le cas où la variance $\sigma^2$ est connue

- Soit $X_i$, la v.a qui renvoit la masse de l'objet i de l'échantillon. On cherche un intervalle de confiance de $\mu = E(X_i)$
- On sait qu'avec proba $1-\alpha$,

$$\overline{X}_n - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}_n + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- $\alpha = 0,01$ donne un $u_\alpha = 2,58$ .(table de la loi normale centrée réduite)
- D'ou,

$$179,93 - 2,58 \frac{0,92}{\sqrt{100}} \leq \mu \leq 179,93 + 2,58 \frac{0,92}{\sqrt{100}}$$

i.e : Avec proba 0,99 on a , $\mu \in [179,69; 180,17]$.

**Exemple 2 :Estimation de la moyenne, dans le cas où la variance $\sigma^2$ est inconnue.**

Le chiffre d'affaire mensuel d'une entreprise suit une loi normale de moyenne $\mu$ et d'écart-type $\sigma$ inconnus. Sur les 12 derniers mois, on a observé une moyenne des chiffres d'affaires égale à 10 000 euros avec un écart-type de 2000 euros.

Donner une estimation de $\mu$ par intervalle de confiance au niveau 0,98.

## Exemple 2 :Estimation de la moyenne, dans le cas où la variance $\sigma^2$ est inconnue.

- Soit $X_i$ le chiffre d'affaire de l'entreprise le mois i.
- On sait que $T = \frac{\sqrt{11}}{S_{12}}(\overline{X}_{12} - \mu)$ suit une loi de Student (11).
- A l'aide de la table de la loi de Student, on trouve :
  $t_\alpha = t_{0,02} \simeq 2,718 \;\; tel \;\; que \;\; P(|T| \leq 2,718) = 0,98$
- Donc, $|\frac{\sqrt{11}}{S_{12}}(\overline{X}_{12} - \mu)| \leq 2,718$ avec proba $= 0,98$
  i.e : $\mu \in [\overline{X}_{12} - 2,718\frac{S_{12}}{\sqrt{11}}; \overline{X}_{12} + 2,718\frac{S_{12}}{\sqrt{11}}]$ Avec : $X_{12} = 10000$ et $S_{12} = 2000$, on obtient :

$$\mu \in [8360,9; 11639,02], \;\; avec \;\; proba \;\; 0,98$$

# Estimation de la variance d'une population

## Estimation ponctuelle

Etant donné un population de variance $\sigma^2$

- On a : $E(\hat{S}^2) = \sigma^2$ alors $\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2$ est un estimateur sans biais de $\sigma^2$.
- Cet estimateur est appelé quasi-variance. La variance de cet estimateur est :

$$V(\hat{S}^2) = \frac{2}{n-1}\sigma^4$$

# Estimation de la variance d'une population

## Estimation par intervalle de confiance

- Soit une population normale de variance $\sigma^2$ . L'estimateur par intervalle de confiance de $\sigma^2$ consiste à déterminer les bornes $x_1$ et $x_2$ d'un intervalle qui a un niveau de confiance, appelé probabilité $1-\alpha$ , de contenir $\sigma^2$.
- Les bornes $x_1$ et$x_2$ sont telles que :

$$P(x_1 \leq \sigma^2 \leq x_2) = 1 - \alpha$$

# Estimation de la variance d'une population

## Estimation par intervalle de confiance

Donc :

$$I_c(\sigma^2) = I_c = [\frac{1}{k_{1-\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2 \ ; \ \frac{1}{k_{\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2]$$

ou $k_{\frac{\alpha}{2}}$ et $k_{1-\frac{\alpha}{2}}$ sont les quantiles d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ et $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $\chi^2_{n-1}$

**Exemple 1 :**

Au controle de la qualité d'un institut de beauté, on analyse le PH d'un certain parfum. On sait que ce facteur maintient un aspect normal de moyenne 2,8. Afin de connaitre sa variance, on effectue un prélèvement de 25 unités de ce parfum dont on mesure le PH.
Pour certain échantillon, la valeur de $\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$ (ou m=2,8 ) est de 0,0625.
B$\hat{a}$tir un intervalle de confaince qui permettra d'estimer la varaince du PH de ce parfum avec un degré de certitude de 95%.

## Exemple 1 :Solution

- La moyenne de la population est connue :
- $m = \mu = 2,8$ , $\frac{\sum(x_i - m)^2}{\sigma^2} \hookrightarrow \chi^2_{25}$
- $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975,$
- $P(\frac{\sum(x_i - m)^2}{\sigma^2} \geq x_2) = \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow x_2 = 40,64$
- $P(\frac{\sum(x_i - m)^2}{\sigma^2} \geq x_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow x_1 = 13,12$

$$I_c(\sigma^2) = [\frac{0,0625}{40,64}; \frac{0,0625}{13,12}] = [0,0015; 0,004]$$

## Exemple 2 :

La consomation d'essance en $(L/100km)$ d'un certian modèle d'automobile est distribuée selon une loi normale. On note la consommation de 25 voitures de ce modèle. On obtient une moyenne d'échantillon de $8,7L/100km$ et un écart-type corrigé d'échantillon de $0,09L/100km$. Estimer la variance de la population par intervalle avec $90\%$

## Exemple 2 :

- La moyenne est inconnue :
- $\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \hookrightarrow \chi^2_{24}$
- $1-\alpha = 0,9 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,95$
- $P(\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \geq x_2) = \frac{\alpha}{2} = 0,05 \rightarrow x_2 = 36,42$
- $P(\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \geq x_1) = 1-\frac{\alpha}{2} = 0,95 \rightarrow x_1 = 13,58$
- $I_c(\sigma^2) = [\frac{(n-1)\hat{S}^2}{x_2}; \frac{(n-1)\hat{S}^2}{x_1}]$

$$I_c(\sigma^2) = [\frac{24 \times (0,09)^2}{36,42}; \frac{24 \times (0,09)^2}{13,85}] = [0,0053; 0,012]$$

**Exemple 3 :**

Une entreprise comporte un grand nombre d'employés avec un système de pointage des heures d'arrivée. Chaque employé doit arriver à 8h. On a relevé le retard d'un échantillon de 25 employés. On a obtenu un retard moyen de 6,47 min pour un écart-type moyen 1,12 min. A partir de ces informations, donner un intervalle de confiance au seuil de 0,9 pour l'écart-type du temps de retard.

## Exemple 3 :

- Soit $X_i$ le temps de retard de l'employé i. On a $\bar{X}_{25} = 6,47$ et $S_{25} = 1,12$ On cherche une estimée de $\sigma^2 = Var(X_i)$.
- On sait que $Z = \frac{25S_{25}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(24)$
- A l'aide de la table de la loi d'un $\chi^2$, on détermine :
  $m_\alpha \simeq 13,848$ et $M_\alpha \simeq 36,415$ tels que :

$$P(Z \geq M_\alpha) = 0,05 \ \ et \ \ P(Z \leq m_\alpha) = 0,05 :$$

- on obtient $\sigma^2 \in [\frac{25S_{25}^2}{36{,}415}; \frac{25S_{25}^2}{13{,}848}]$ avec proba 0,9 :
  ie : $\sigma \in [0,927; 1,505]$ avec proba 0,9

# Estimation de la proportion d'une population

## Estimation ponctuelle

Soit une population dont les individus possèdent un caractère A avec une probabilité p. On cherche à déterminer cette probabilité inconnue en prélevant un échantillon de taille n dans cette population. On constate que k parmi les n individus possèdent le caractère A. L'estimation ponctuelle sans biais $\hat{p}$ de la proportion p est donnée donc

$$\hat{p} = \frac{k}{n}$$

# Estimation de la proportion d'une population

## Estimation ponctuelle

Etant donné une population de proportion p.

- On a : $E(f_n) = p$ alors $\hat{p} = f_n$ alors est un estimation sans biais de p.
- La variance de cet estimateur est :

$$V(f_n) = \frac{p(1-p)}{n}$$

et

$$\sigma_{f_n} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

# Estimation de la proportion d'une population

## Estimation par intervalle de confiance

- L'estimation par intervalle de confiance d'une proportion p consiste à déterminer les bornes $x_1$ et $x_2$ d'un intervalle I qui a niveau de confiance, appelé probabilité $1-\alpha$ , de contenir p.

- Les bornes $x_1$ et $x_2$ sont telles que :

$$P(x_1 \leq p \leq x_2) = 1 - \alpha$$

# Estimation de la proportion d'une population

## Estimation par intervalle de confiance

Si $n \geq 30$ et $n \times f_n \geq 5$

Alors :

$$I_c(p) = [f_n - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n}} \;\; ; \;\; f_n + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n}}]$$

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ la valeur de la variable normale $N(0,1)$ appelé quartile, lue dans la table de la loi normale centrée réduite.

$$P(N(0,1) \leq Z_\alpha) = \alpha$$

## Exemple 1 : Intervalle de confiance de la moyenne et de l'écart type

Dans une entreprise produisant un article déterminé on veut estimer sa durée de vie en heures. À cette fin on a observé un échantillon aléatoire et simple de 16 unités dont les résultats sont (en 1000 heures) :

1,10 1,05 1,25 1,08 1,35 1,15 1,30 1,25
1,30 1,35 1,15 1,32 1,05 1,25 1,10 1,15

L'estimation ponctuelle de la moyenne de la population est :

$$\hat{m} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{16} x_i}{16} = 1,2$$

L'estimation ponctuelle de l'écart type de la population de la population est :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2}{16 - 1}} = 0,11$$

## L'intervalle de confiance de la moyenne a un niveau de confiance de 95% :

La distribution de la population parent étant inconnue et la taille de l'échantillon inférieure à 30, l'intervalle de confiance de la moyenne est défini par :

$$\overline{X} \pm T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

La valeur de $T_{1-\frac{\alpha}{2}}$ à 15 degrés de liberté est : $t_{0,975}$=2,131.
l'intervalle de confiance est :

$$\overline{X} \pm T_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = 1,2 \pm 2,131 \frac{0,11}{\sqrt{16}}$$

$$\overline{X_1} = 1,2 - 2,131 \frac{0,11}{\sqrt{16}} = 1,14 \;\; et \;\; \overline{X_2} = 1,2 + 2,131 \frac{0,11}{\sqrt{16}} = 1,26$$

L'intervalle $[1,14; 1,26]$ a une probabilité de 95% de contenir la vraie valeur de la moyenne de la population.

## L'intervalle de confiance de l'écart type a un niveau de confiance de 95% :

Les limites de confiances de la variance sont :

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \ \ et \ \ \sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}$$

les valeurs de $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ et $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ sont a 15 degrés de liberte :

$$\chi^2_{0,025} = 6,26 \ \ et \ \ \chi^2_{0,975} = 27,49$$

## L'intervalle de confiance de l'écart type a un niveau de confiance de 95% :

L'écart type est la racine carrée de la variance, ses limites de confiance sont donc :

$$\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}} = \sqrt{\frac{0,11^2 \times 15}{27,49}} = 0,08$$

$$\hat{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}} = \sqrt{\frac{0,11^2 \times 15}{6,26}} = 0,17$$

## Exemple 2 : intervalle de confiance de la proportion

On etudie le pourcentage d'utilisation d'une machine. 400 observations ont ete effectuees qui ont donne le resultat suivant :

- Machine marche : 320 observations.
- Machine arretee : 80 observations.

L'estimation ponctuelle de la proportion d'utilisation de la machine est :

$$\hat{p} = f_n = \frac{320}{400} = 0,8$$

Le taux d'utilisation de la machine est estime a 80%.

## Exemple 2 : intervalle de confiance de la proportion

L'intervalle de confiance de la proportion a un niveau de confiance de 95% est défini par :

$$f_n \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

La valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est : $Z_{0,975} = 1,96$

Les limites de confiances de la proportion sont :

$$p_1 = f_n - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,80 - 1,96\sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{400}} = 0,76$$

$$p_2 = f_n + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,80 + 1,96\sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{400}} = 0,84$$

L'intervalle $[76\%; 84\%]$ a une probabilité de 95% de contenir le vrai taux d'utilisation de la machine.

# Exercices d'application :