COURS D'ECHANTILLONNAGE ET ESTIMATIONS
Chapitre : La détirmination de la taille de l'échantillon

Licence fondamentale en Sciences Economiques et Gestion
Année universitaire 2016-2017

Plan

La détirmination de la taille de l'échantillon

A : Détirmination de la taille de l'échantillon pour le cas d'une moyenne

B : Détirmination de la taille de l'échantillon pour le cas d'une proportion

La détirmination de la taille de l'échantillon

La détermination de la taille de l'échantillon n est souvent un compromis entre :

- La fixation d'un degré de précicion à atteinddre : il y a un degré d'incertitude associé aux estimations établies à partir d'un échantillon qui dépond notamment de la méthode d'échantillonage adoptée et de la taille de l'échantillon ;
- Le bedget disponible pour l'enquete : c'est la prise en compte de la contrainte financière ou du budget alloué pour la réalisation de l'enquete.
- et à d'autres contraintes opérationnelles comme le temps disponible.

Afin de déterminer la taille de l'échantillon, nous utiliserons l'inégalité de Bienaymé Tchebicheff ou loi normale :

A : Détirmination de la taille de l'échantillon pour le cas d'une moyenne

Utilisation de l'inégalité de Bienaymé Tchebicheff

Cette inégalité n'est utilisée que si la loi de la variable aléatoire est complètement inconnue. Elle aboutit à des échantillons de taille élevée.

On s'interroge sur la taille d'échantillon n à prélevervpour que la moyenne observée sur l'échantillon $(\bar{X})$ converger vers son espérance mathématique (m) avec une probabilité au moins égale à $(1-\alpha)$ et un degrè de précision au moins égale à (ϵ) et fixées à priori.

Pour répondre à cette question, on va appliquer l'inégalité de Bienaymé Tchebicheff à la moyenne observée $(\bar{X})$ comme nous l'avons présenté auparavant :

$$P(|\bar{X}-E(\bar{X})| \leq t\sigma_{(\bar{X})}) \geq 1-\frac{1}{t^2} \tag{1.1}$$

$$P(|\bar{X}-E(\bar{X})| \leq \epsilon) \geq 1-\alpha \tag{1.2}$$

A : Détirmination de la taille de l'échantillon pour le cas d'une moyenne

Détermination de la valeur de t :

Avant de déterminer la taille de l'échantillon n, il faut dans un premier temps, déterminer la valeur de t comme suit :
D'après les relations (1.1) et (1.2), on a :

$$1 - \frac{1}{t^2} = 1 - \alpha \Rightarrow \frac{1}{t^2} = \alpha \Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \tag{1.3}$$

Si par exemple dans la relation (1.3), $\alpha = 1\% \Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{0{,}01}} \Rightarrow t = 10.$

A : Détirmination de la taille de l'échantillon pour le cas d'une moyenne

Détermination de la valeur de n :

D'après les relations (1.1) et (1.2), on a :

$$t\sigma_{(\bar{X})} \leq \epsilon \tag{1.4}$$

Deux cas peuvent se présenter pour la relation (1.4), à savoir $\sigma_{(\bar{X})}$:

- Le cas d'un tirage avec remise (T.A.R),
- Le cas d'un tirage sans remise (T.S.R).

A : Détirmination de la taille de l'échantillon pour le cas d'une moyenne

Détermination de la taille de l'échantillon n dans le cas d'un T.A.R :

Dans le cas d'un tirage avec remise, la relation (1.4) prendra la forme suivante :

$$t\sigma(\bar{X}) \leq \epsilon \Rightarrow t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \epsilon \Rightarrow t^2 \times \frac{\sigma^2}{n} \leq \epsilon^2 \Rightarrow n \geq \frac{t^2 \times \sigma^2}{\epsilon^2} \tag{1.5}$$

Si on remplace t par sa valeur (relation (1.3)) dans la relation (1.5), on peut déterminer la taille de l'échantillon n dans le cas d'un T.A.R, Comme suit :

$$n \geq \frac{\frac{1}{\alpha} \times \sigma^2}{\epsilon^2} \tag{1.6}$$

Donc, il suffit de tirer un échantion ou moins égal à $\left(\frac{\frac{1}{\alpha} \times \sigma^2}{\epsilon^2}\right)$ individus pour que la moyenne de la population m soit comprise dans l'intervalle $[\bar{X} - \epsilon; \bar{X} + \epsilon]$ avec une probabilité au moins égale à $(1 - \alpha)$

A : Détirmination de la taille de l'échantillon pour le cas d'une moyenne

Détermination de la taille de l'échantillon n dans le cas d'un T.S.R :

Dans le cas d'un tirage sans remise, la relation (1.4) prendra la forme suivante :

$$t\sigma_{(\bar{X})} \leq \epsilon \Rightarrow t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \epsilon \Rightarrow t^2 \times \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1} \leq \epsilon^2$$

$$\Rightarrow \frac{N-n}{n} \leq \frac{\epsilon^2 \times (N-1)}{t^2 \times \sigma^2} \Rightarrow \frac{N}{n} - 1 \leq \frac{\epsilon^2 \times (N-1)}{t^2 \times \sigma^2} \Rightarrow \frac{N}{n} \leq \frac{\epsilon^2 \times (N-1)}{t^2 \times \sigma^2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{N}{n} \leq \frac{\epsilon^2 \times (N-1) + (t^2 \times \sigma^2)}{t^2 \times \sigma^2} \Rightarrow \frac{n}{N} \geq \frac{t^2 \times \sigma^2}{\epsilon^2 \times (N-1) + (t^2 \times \sigma^2)}$$

$$\Rightarrow n \geq (\frac{N \times t^2 \times \sigma^2}{\epsilon^2 \times (N-1) + (t^2 \times \sigma^2)}) \tag{1.7}$$

A : Détirmination de la taille de l'échantillon pour le cas d'une moyenne

Détermination de la taille de l'échantillon n dans le cas d'un T.S.R :

Si on remplace t par sa valeur (relation (1.3)) dans la relation (1.7), on peut déterminer la taille de l'échantillon n dans le cas d'un T.S.R , comme suit :

$$n \geq \left(\frac{N \times (\frac{1}{\alpha}) \times \sigma^2}{\epsilon^2 \times (N-1) + ((\frac{1}{\alpha}) \times \sigma^2)}\right) \tag{1.8}$$

Dans le cas d'un tirage sans remise, il suffit de tirer un échantillon au moins égale à $\left(\frac{N \times (\frac{1}{\alpha}) \times \sigma^2}{\epsilon^2 (N-1) + ((\frac{1}{\alpha}) \times \sigma^2)}\right)$ individus pour que la moyenne de la population m soit comprise dans l'intervalle $[\bar{X} - \epsilon; \bar{X} + \epsilon]$ avec une probabilité au moins églale à $(1 - \alpha)$

B : Détirmination de la taille de l'échantillon pour le cas d'une proportion

Qelle taille d'échantillon n peut-on préleve, pour que la fréquence observée sur l'échantillon (f) converge vers son espérance mathématique (p) avec une probabilité au moins égale à $(1-\alpha)$ et un degré de précision au moins égal à (ϵ) et fixées à priori ?

L'application l'inégalité de Bienaymé Tchebicheff à la fréquence observée sur l'échantillon (f) nous permet de déterminer la taille maximale de l'échantillon à prélever comme suit :

$$P(|f - E(f)| \leq t\sigma_{(f)}) \geq 1 - \frac{1}{t^2} \tag{1.9}$$

$$P(|f - E(f)| \leq \epsilon) \geq 1 - \alpha \tag{1.10}$$

B : Détirmination de la taille de l'échantillon pour le cas d'une proportion

D'après les relations (1.9) et (1.10) , on a :

$$t\sigma_{(f)} \leq \epsilon \tag{1.11}$$

Comme auparavant, deux cas peuvent se présenter pour la relation (1.11), à savoir $\sigma_{(f)}$:

- Le cas d'un tirage avec remise (T.A.R),
- Le cas d'un tirage sans remise (T.S.R).

B : Détirmination de la taille de l'échantillon pour le cas d'une proportion

Détermination de la taille de l'échantillon n dans le cas d'un T.A.R :

Dans le cas d'un tirage avec remise, la relation (1.11) prendra la forme suivante :

$$t\sigma_{(f)} \leq \epsilon \Rightarrow t \times \sqrt{\frac{p \times q}{n}} \leq \epsilon \Rightarrow t^2 \times \frac{p \times q}{n} \leq \epsilon^2 \Rightarrow n \geq \frac{t^2 \times p \times q}{\epsilon^2} \tag{1.12}$$

Si on remplace t par sa valeur (relation (1.3)) dans la relation (1.12), on peut déterminer la taille optimale de l'échantillon n dans le cas d'un T.A.R, comme suit :

$$n \geq \left(\frac{\frac{1}{\alpha} \times p \times q}{\epsilon^2}\right) \tag{1.13}$$

Donc, il suffit de tirer un échantillon au moins égale à $\left(\frac{\frac{1}{\alpha} \times p \times q}{\epsilon^2}\right)$ individus. pour que la proportion de la population p soit comprise dans l'intervalle $[f - \epsilon; f + \epsilon]$ avec une probabilité au moins égale à $(1 - \alpha)$

B : Détirmination de la taille de l'échantillon pour le cas d'une proportion

Détermination de la taille de l'échantillon n dans le cas d'un T.S.R :

Dans le cas d'un tirage sans remise, la relation (1.11) prendra la forme suivante :

$$t\sigma_{(f)} \leq \epsilon \Rightarrow t \times \sqrt{\frac{p \times q}{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \epsilon \Rightarrow t^2 \times \frac{p \times q}{n} \times \frac{N-n}{N-1} \leq \epsilon^2$$

$$\Rightarrow \frac{N-n}{n} \leq \frac{\epsilon^2 \times (N-1)}{t^2 \times p \times q} \Rightarrow \frac{N}{n} - 1 \leq \frac{\epsilon^2 \times (N-1)}{t^2 \times p \times q} \Rightarrow \frac{N}{n} \leq \frac{\epsilon^2 \times (N-1)}{t^2 \times p \times q} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{N}{n} \leq \frac{\epsilon^2 \times (N-1) + (t^2 \times p \times q)}{t^2 \times p \times q} \Rightarrow \frac{n}{N} \geq \frac{t^2 \times p \times q}{\epsilon^2 \times (N-1) + (t^2 \times p \times q)}$$

$$\Rightarrow n \geq \left(\frac{N \times t^2 \times p \times q}{\epsilon^2 \times (N-1) + (t^2 \times p \times q)}\right) \tag{1.14}$$

B : Détirmination de la taille de l'échantillon pour le cas d'une proportion

Détermination de la taille de l'échantillon n dans le cas d'un T.S.R :

Si on remplace t par sa valeur (relation (1.3)) dans la relation (1.13), on peut déterminer la taille de l'échantillon n dans le cas d'un T.S.R , comme suit :

$$n \geq \left(\frac{N \times (\frac{1}{\alpha}) \times p \times q}{\epsilon^2 \times (N-1) + ((\frac{1}{\alpha}) \times p \times q)}\right) \tag{1.15}$$

Dans le cas d'un tirage sans remise, il suffit de tirer un échantillon au moins égale à $(\frac{N \times (\frac{1}{\alpha}) \times p \times q}{\epsilon^2 \times (N-1) + ((\frac{1}{\alpha}) \times p \times q)})$ individus pour que la proportion de la population p soit comprise dans l'intervalle $[f - \epsilon; f + \epsilon]$ avec une probabilité au moins églale à $(1 - \alpha)$

Application de l'inégalité de Bienaymé - Tchébicheff

Exemple :1

Le revenu mensuel moyen dans un pays donné est de 7000 DH par famille avec un écart-type de 1200 DH. La forme de la distribution des salaires est complètement inconue. On demande de déterminer l'étendue du revenu annuel centré sur la moyenne aui inclut au moins 95% des familles. Interprétez le résultat.

Exemple :2

On lance un dé n fois et on considère la variable aléatoire N = nombre de six. A partir de quelle valeur de n aura-t-on 9 chances sur 10 d'avoir $|\frac{N}{n} - \frac{1}{6}| \leq 0,01$?

Exercices d'application :